پاسخ تمرینات صفحه ۸۵ کتاب دیفرانسیل سال چهارم ریاضی

۱– الف) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ی دلخواهی باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۲$ و به ازای هر n ، $a_n \neq ۲$. داریم:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{۳} = \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} a_n \times \lim_{n\to\infty} a_n = ۲\times۲\times۲ = ۸$$

و لذا داریم $\lim\limits_{x\to ۲} x^{۳} = ۸$.

ب) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ی دلخواهی باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۳$ و به ازای هر n ، $a_n \neq ۲$.داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^{۲}-۹}{a_n-۳} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(a_n-۳)}(a_n+۳)}{\cancel{(a_n-۳)}} = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} ۳ = ۳+۳ = ۶$$

پ) در این مثال منظور از $x \to ۱$ ، همان $x \to ۱^{+}$ است چرا که دامنه‌ی تابع $\sqrt{x-۱}$ عبارت است از $[۱,+\infty)$.حال فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ی دلخواهی باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = ۱$ و به ازای هر n ، $a_n > ۱$. در این صورت داریم:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n-۱} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n - ۱} = \sqrt{۱-۱} = ۰$$

و لذا $\lim\limits_{x\to ۱} \sqrt{x-۱} = ۰$.

ت) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ی دلخواهی باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ و به ازای هر n ، $a_n \neq a$ و $a_n \geq ۰$.در این صورت

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n} = \sqrt{a}$$

و بنابراین $\lim\limits_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

ث) فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ی دلخواهی باشد که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{۱}{۲}$ و به ازای هر n ، $a_n > \frac{۱}{۲}$. در این صورت :

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{۲}[a_n] = \lim_{n\to\infty} a_n^{۲} \times \lim_{n\to\infty} [a_n] = (\frac{۱}{۲})^{۲} \times \left[\frac{۱}{۲}\right] = \frac{۱}{۴}\times ۰ = ۰$$

و لذا $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}^{+}} x^{۲}[x] = ۰$.

۲–الف) قرار دهید $f(x) = \frac{۱}{x}$ و $g(x) = \frac{-۱}{x}$. در این صورت f,g هیچ یک در $x = ۰$ حد ندارند($\lim\limits_{x\to ۰^{+}} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to ۰^{-}} f(x) = -\infty$ و به همین شکل برای g) در حالی که داریم:

$$\lim_{x\to ۰} (f(x)+g(x)) = \lim_{x\to ۰} \left(\frac{۱}{x} - \frac{۱}{x}\right) = \lim_{x\to ۰} ۰ = ۰$$

ب) قرار دهید $f(x)=\begin{cases}۱ & x\in Q\\ ۰ & x\in Q'\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}۰ & x\in Q\\ ۱ & x\in Q'\end{cases}$. در این صورت $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۰} g(x)$ موجود نیستند(مشابه تابع دیریکله که در هیچ نقطه ای حد ندارد) در حالیکه به ازای هر $x\in\mathbb{R}$ داریم $(fg)(x)=۰$ و لذا

$$\lim_{x\to ۰}\left(f(x)g(x)\right)=\lim_{x\to ۰}۰=۰$$

۳- الف)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(x+۳)^۲-۹}{x}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲+۶x+۹-۹}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{x}(x+۶)}{\cancel{x}}=۰+۶=۶$$

ب)

$$\lim_{x\to ۴}\frac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}=\frac{۰}{۰}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}{(\sqrt{x}-۲)(\sqrt{x}+۲)}=\lim_{x\to ۴}\frac{(x-۴)(\sqrt{x}+۲)}{\sqrt{x}^۲-۲^۲}=\lim_{x\to ۴}\frac{\cancel{(x-۴)}(\sqrt{x}+۲)}{\cancel{x-۴}}=\sqrt{۴}+۲=۴$$

پ) توجه کنید که می توان همسایگی محذوف ۰ را آن قدر کوچک کرد که در آن داشته باشیم $\sin x\neq ۰$. لذا

$$\lim_{x\to ۰}\tan x\cot x=\lim_{x\to ۰}\frac{\cancel{\sin x}}{\cancel{\cos x}}\times\frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\sin x}}=\lim_{x\to ۰}۱=۱$$

دقت کنید که برای ساده کردن $\sin x$ از صورت و مخرج باید از صفر نبودن آن اطمینان حاصل می کردیم.

ت) $x\to ۰^-$ و لذا $۲x\to ۰^-$. پس $[x]\to -۱$ و $[۲x]\to -۱$. بنا بر این:

$$\lim_{x\to ۰^-}\left(۱-x+[x]-[۲x]\right)=۱-۰-۱-(-۱)=۱-۱+۱=۱$$

۴- مقدار حد صورت در $x=۲$ ، صفر می شود. اگر حد مخرج عددی مخالف صفر شود آنگاه مقدار حد کسر داده شده برابر صفر می گردد که نمی خواهیم چنین شود. لذا باید حد مخرج نیز در $x=۲$ برابر صفر باشد. یعنی:

$$\lim_{x\to ۲}۲x^۲+ax-۴=۰\quad\Rightarrow\quad ۸+۲a-۴=۰\quad\Rightarrow\quad a=-۲$$

حال با قرار دادن -۲ به جای a داریم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲x^۲-۲x-۴}=\lim_{x\to ۲}\frac{x+۱-\sqrt{۴x+۱}}{۲(x-۲)(x+۱)}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۱-\sqrt{۴x+۱})(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}{۲(x-۲)(x+۱)(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۱)^۲-(۴x+۱)}{۲(x-۲)(x+۱)(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}=$$

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲+۲x+۱-۴x-۱}{۲(x-۲)(x+۱)(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}=\lim_{x\to ۲}\frac{x\cancel{(x-۲)}}{۲\cancel{(x-۲)}(x+۱)(x+۱+\sqrt{۴x+۱})}=\frac{۲}{۲\times ۳(۳+\sqrt{۹})}=\frac{۱}{۱۸}$$

۵- چون حد مخرج صفر است لذا حد صورت نیز باید صفر باشد. پس داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\sqrt{ax+b}-۲=\sqrt{b}-۲=۰ \quad \Rightarrow \quad \boxed{b=۴}$$

با قرار دادن ۴ به جای b داریم:

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{ax+۴}-۲}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\left(\sqrt{ax+۴}-۲\right)\left(\sqrt{ax+۴}+۲\right)}{x\left(\sqrt{ax+۴}+۲\right)}=\lim_{x\to ۰}\frac{ax+\cancel{۴}-\cancel{۴}}{x\left(\sqrt{ax+۴}+۲\right)}=\lim_{x\to ۰}\frac{a}{\sqrt{ax+۴}+۲}=\frac{a}{\sqrt{۴}+۲}=\frac{a}{۴}=۱$$

و لذا $\boxed{a=۴}$.

۶- در این مسایل با انتخاب همسایگی محذوف مناسبی از ۰ ، قدر مطلق ها را بر می داریم. پیدا کردن این همسایگی از روی ریشه های عبارات درون قدر مطلق ها صورت می گیرد.

$$۳x-۱=۰ \quad \Rightarrow \quad x=\frac{۱}{۳}$$

$$۳x+۱=۰ \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{۱}{۳}$$

پس همسایگی مناسب صفر عبارت است از $-\frac{۱}{۳}<x<\frac{۱}{۳}$. در این همسایگی داریم:

$$|۳x-۱|-|۳x+۱|=-۳x+۱-(۳x+۱)=-۳x+۱-۳x-۱=-۶x$$

و لذا

$$\lim_{x\to ۰}\frac{|۳x-۱|-|۳x+۱|}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۶\cancel{x}}{\cancel{x}}=\boxed{-۶}$$

۷- داریم

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{۱}{x}\left(۱-x\left[\frac{۱}{x}\right]\right)=\lim_{x\to ۰^+}\left(\frac{۱}{x}-\left[\frac{۱}{x}\right]\right)$$

اما آخرین حد وجود ندارد . برای اثبات این موضوع دنباله های $a_n=\frac{۱}{n}$ و $b_n=\frac{۱}{n+\frac{۱}{۲}}$ را در نظر می گیریم که برای هر دو داریم $a_n\to ۰^+$ و $b_n\to ۰^+$.

در حالی که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{a_n}-\left[\frac{۱}{a_n}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n-[n]\right)=\lim_{n\to\infty}(n-n)=۰$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{b_n}-\left[\frac{۱}{b_n}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{۱}{۲}-\left[n+\frac{۱}{۲}\right]\right)=\lim_{n\to\infty}\left(n+\frac{۱}{۲}-n\right)=\frac{۱}{۲}$$

۸-

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x-4}{x^2-2x}-\frac{x+2}{x^2+x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(3x-4)(x^2+x)-(x+2)(x^2-2x)}{(x^2-2x)(x^2+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{3x^3+3x^2-4x^2-4x-\left(x^3-2x^2+2x^2-4x\right)}{x(x-2)x(x+1)}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x^3-x^2-4x-x^3+4x}{x^2(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3-x^2}{x^2(x-2)(x+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}(2x-1)}{\cancel{x^2}(x-2)(x+1)}=\frac{-1}{-2\times 1}=\frac{1}{2}$$

۹-

$$\lim_{x\to 0^+}\sin 4x(\cot 2x-\cot x)=\lim_{x\to 0^+}2\sin 2x\cos 2x\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\cos^2 2x-\frac{2\sin 2x\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(2\cos^2 2x-\frac{4\sin x\cos x\cos x}{\sin x}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(2\cos^2 2x-4\cos^2 x\right)=2\times 1-4\times 1=-2$$

۱۰- چون $x\to \frac{1}{2}^+$ لذا $x>\frac{1}{2}$ و بنا براین $\pi x>\frac{\pi}{2}$ پس $\cos\pi x<0$ و داریم:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{|\cos\pi x|}{1-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{-\cos\pi x}{1-\sqrt{2x}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{-\cos\pi x\left(1+\sqrt{2x}\right)}{1-2x}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi x\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)}{1-2x}=$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{-\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)\left(1+\sqrt{2x}\right)}{\left(\frac{1}{2}-x\right)2}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{-\sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}-x\right)\right)}{\left(\frac{1}{2}-x\right)}\times\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{\left(1+\sqrt{2x}\right)}{2}=-\pi\times\frac{2}{2}=-\pi$$

۱۱- تابع f همه جا حد دارد. زیرا داریم $\frac{4x^2+3}{x^2+1}=\frac{4x^2+4-1}{x^2+1}=\frac{4(x^2+1)-1}{x^2+1}=4-\frac{1}{x^2+1}$ و چون $0<\frac{1}{x^2+1}\le 1$ لذا $3\le 4-\frac{1}{x^2+1}<4$ و بنا براین $f(x)=\left[4-\frac{1}{x^2+1}\right]=4$. لذا تابع f همه جا حد دارد.

۱۲- الف)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\times\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=1\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

ب)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1-\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin x-\cos x}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\sin x-\cos x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{-1}{\cos x}=\frac{-1}{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\sqrt{2}$$

پ)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\cos ۳x-\cos x}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin\left(\frac{۳x-x}{۲}\right)\sin\left(\frac{۳x+x}{۲}\right)}{x^۲}=\lim_{x\to ۰}\frac{-۲\sin x\sin ۲x}{x^۲}=-۲\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\times\lim_{x\to ۰}\frac{\sin ۲x}{x}=۲\times ۱\times ۲=۴$$

ت)

$$\lim_{x\to ۴}\left(۲-\sqrt{x}\right)\tan\frac{\pi x}{۸}=\lim_{x\to ۴}\frac{(۴-x)}{۲+\sqrt{x}}\cot\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi x}{۸}\right)=\lim_{x\to ۴}\frac{۴-x}{\left(۲+\sqrt{x}\right)\tan\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi x}{۸}\right)}=\lim_{x\to ۴}\frac{۴-x}{\left(۲+\sqrt{x}\right)\tan\left(۴-x\right)\frac{\pi}{۸}}=$$

$$\lim_{x\to ۴}\frac{۱}{\left(۲+\sqrt{x}\right)}\times\lim_{x\to ۴}\frac{۴-x}{\tan\left(۴-x\right)\frac{\pi}{۸}}=\frac{۱}{۲+\sqrt{۴}}\times\frac{۱}{\frac{\pi}{۸}}=\frac{۲}{\pi}$$

۱۳-

$$\left.\begin{array}{c}-۱\le\cos\frac{۱}{x}\le ۱\Rightarrow -x^۲\le x^۲\cos\frac{۱}{x}\le x^۲\\ \lim_{x\to ۰}-x^۲=۰,\lim_{x\to ۰}x^۲=۰\end{array}\right\}\Rightarrow\lim_{x\to ۰}x^۲\cos\frac{۱}{x}=۰$$

راه حل دیگر این که با توجه به کران دار بودن تابع $\cos\frac{۱}{x}$ ، ($-۱\le\cos\frac{۱}{x}\le ۱$) و اینکه $\lim_{x\to ۰}x^۲=۰$ از قضیه نتیجه می شود که $\lim_{x\to ۰}x^۲\cos\frac{۱}{x}=۰$.

۱۴-

$$f\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n}\right)=\left[\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n}+\frac{۱}{۳}\right]+\left[۱+\frac{۳}{n}\right]=\left[\frac{۱}{n}+\frac{۲}{۳}\right]+\left[۱+\frac{۳}{n}\right]$$

وقتی $n\to\infty$ داریم $\frac{۱}{n}\to ۰$ و لذا $\frac{۱}{n}+\frac{۲}{۳}\to\frac{۲}{۳}$ و همچنین $۱+\frac{۳}{n}\to ۱^+$. بنابراین

$\left[۱+\frac{۳}{n}\right]\to ۱$ و $\left[\frac{۱}{n}+\frac{۲}{۳}\right]\to\left[\frac{۲}{۳}\right]=۰$ و لذا $\lim_{n\to\infty}f\left(\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{n}\right)=۰+۱=۱$.

۱۵- الف) فرض کنیم $a_n=۱+\frac{۱}{n}$ و $b_n=۱-\frac{۱}{n}$. در این صورت به وضوح $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=۱$ در حالی که داریم:

$$\lim_{n\to\infty}f\left(b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|۱-\frac{۱}{n}-۱\right|}{۱-\frac{۱}{n}-۱}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{n}}{-\frac{۱}{n}}=-۱$$

و

$$\lim_{n\to\infty}f\left(a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|۱+\frac{۱}{n}-۱\right|}{۱+\frac{۱}{n}-۱}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{۱}{n}}{\frac{۱}{n}}=۱$$

و لذا تابع f در $x=۱$ حد ندارد.

ب)داریم:

$$\begin{cases} \frac{۱}{x-۱}=۲n\pi \\ \frac{۱}{x-۱}=۲n\pi+\frac{\pi}{۲} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-۱=\frac{۱}{۲n\pi} \\ x-۱=\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۱+\frac{۱}{۲n\pi} \\ x=۱+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}} \end{cases}$$

پس فرض کنیم $a_n=۱+\frac{۱}{۲n\pi}$ و $b_n=۱+\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}$. در این صورت داریم $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=۱$. در حالی که

$$\lim_{n\to\infty} f\left(a_n\right)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{۱}{a_n-۱}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi}}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos ۲n\pi=\lim_{n\to\infty}۱=۱$$

در حالیکه

$$\lim_{n\to\infty} f\left(b_n\right)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{۱}{b_n-۱}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{۱}{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(۲n\pi+\frac{\pi}{۲}\right)=\lim_{n\to\infty}\cos\left(\frac{\pi}{۲}\right)=\lim_{n\to\infty}۰=۰$$

و لذا تابع f در $x=۱$ حد ندارد.

۱۶- نقطه‌ی دلخواه $a\in\mathbb{R}$ را انتخاب می کنیم. بنا بر قضیه می دانیم دنباله ای از اعداد گویا مانند $\{a_n\}$ و دنباله ای از اعداد گنگ مانند $\{b_n\}$ موجودند که $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=a$. اما در این صورت داریم

$$\lim_{n\to\infty}D\left(a_n\right)=\lim_{n\to\infty}۱=۱$$

$$\lim_{n\to\infty}D\left(b_n\right)=\lim_{n\to\infty}۰=۰$$

و لذا تابع دیریکله در هیچ نقطه‌ای حد ندارد. توجه کنید که از $a_n\in\mathbb{Q}$ نتیجه می شود که $D\left(a_n\right)=۱$ و از گنگ بودن b_n ها نتیجه می شود که $D\left(b_n\right)=۰$.

۱۷- فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه باشد که $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{۱}{۲}$ و به ازای هر n $a_n\neq\frac{۱}{۲}$.در این صورت داریم :

$$\lim_{n\to\infty} f\left(a_n\right)=\begin{cases} \lim_{n\to\infty}a_n+۲=\frac{۱}{۲}+۲=\frac{۵}{۲} & \text{اگر } a_n \text{ گویا} \\ \lim_{n\to\infty}۳a_n+۱=۳\times\frac{۱}{۲}+۱=\frac{۵}{۲} & \text{اگر } b_n \text{ گنگ} \end{cases}$$

چون مقدار حدها برابر است لذا $\lim_{n\to\infty} f\left(a_n\right)=\frac{۵}{۲}$. بنابراین چون $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه بود پس نتیجه می‌شود که $\lim_{x\to\frac{۱}{۲}} f\left(x\right)=\frac{۵}{۲}$